Early Journal Content on JSTOR, Free to Anyone in the World

This article is one of nearly 500,000 scholarly works digitized and made freely available to everyone in the world by JSTOR.

Known as the Early Journal Content, this set of works include research articles, news, letters, and other writings published in more than 200 of the oldest leading academic journals. The works date from the mid-seventeenth to the early twentieth centuries.

We encourage people to read and share the Early Journal Content openly and to tell others that this resource exists. People may post this content online or redistribute in any way for non-commercial purposes.

Read more about Early Journal Content at http://about.jstor.org/participate-jstor/individuals/early-journal-content.

JSTOR is a digital library of academic journals, books, and primary source objects. JSTOR helps people discover, use, and build upon a wide range of content through a powerful research and teaching platform, and preserves this content for future generations. JSTOR is part of ITHAKA, a not-for-profit organization that also includes Ithaka S+R and Portico. For more information about JSTOR, please contact support@jstor.org.

Sur l'Analyse indéterminée du troisième degré.—Demonstration de plusieurs théorèmes de M. Sylvester.

PAR EDOUARD LUCAS.

SECTION 1.

L'ARITHMÉTIQUE DE DIOPHANTE renferme le premier exemple connu d'Analyse indéterminée du troisème degré; l'immortel auteur y pose, en effet, le problème de trouver deux nombres entiers ou fractionnaires, dont la somme ou la différence de leurs cubes soit égale à la somme ou à la différence des cubes de deux nombres donnés.

FERMAT a indiqué, le premier, un procédé qui permet de déduire, d'une solution initiale, une série indéfinie de solutions nouvelles. Pour résoudre, en nombres entiers ou fractionnaires, l'équation

$$x^3 + y^3 = a^3 + b^3,$$

dans laquelle a et b sont donnés, il suffit de poser

$$x = a + zu, \quad y = b + u,$$

et de disposer de z, de manière à faire disparaître, après la substitution, la première puissance de u. On trouve alors une relation de la forme

$$Au^3 + Bu^2 = 0,$$

qui permet de déterminer u par une équation du premier degré; FERMAT calcule ainsi x et y, et fait servir ces valeurs à la recherche de nouvelles solutions, en nombre indéfini.

Nous remplacerons, dans ce qui suit, les inconnues rationnelles, par des inconnues entières. Désignons par (x, y, z) une première solution, en nombres, entiers, de l'équation

$$x^3 + y^3 = Az^3, \tag{1}$$

nous obtiendrons une autre solution, par le procédé indiqué plus haut, au moyen des formules

$$X = x(x^3 + 2y^3), \quad Y = -y(y^3 + 2x^3), \quad Z = z(x^3 - y^3). \tag{2}$$

On trouve ainsi, successivement, pour $A = 9$,

$$\begin{cases} x_1 = 2, & x_2 = 20, & x_3 = 1\,88479, & x_4 = 12\,43617\,73399\,00948\,36481, \\ y_1 = 1, & y_2 = -17, & y_3 = -36520, & y_4 = 4\,87267\,17171\,43523\,36560, \\ z_1 = 1; & z_2 = 7; & z_3 = +90391; & z_4 = 6\,09623\,83567\,61372\,97449; \end{cases}$$

et, pour $A = 28$,

$$\begin{cases} x_1 = 3, & x_2 = 87, & x_3 = 632\,84705, & x_4 = 18\,92071\,22047\,02010\,97176\,90323\,50335, \\ y_1 = 1, & y_2 = -55, & y_3 = 283\,40511, & y_4 = -15\,01104\,22682\,05492\,03687\,05693\,29391, \\ z_1 = 1; & z_2 = 26; & z_3 = 214\,46828; & z_4 = 4\,94756\,15518\,27392\,93262\,16777\,53432. \end{cases}$$

On observera que ces solutions croissent très-rapidement, et contiennent à peu près quatre fois plus de chiffres, que la solution précédente.

On peut encore remplacer les formules (2) par les suivantes, qui n' en diffèrent que par la forme. Désignons par (x, y, z) des nombres entiers qui vérifient l'équation

$$x^3 + y^3 = Az^3,$$

nous obtiendrons des nombres entiers (X, Y, Z), tels que l'on ait

$$\frac{X^3 + Y^3}{Z^3} = \frac{x^3 + y^3}{z^3} = A,$$

par les formules

$$\frac{X}{x} + \frac{Y}{y} + \frac{Z}{z} = 0, \quad Xx^2 + Yy^2 = AZz^2.$$

SECTION 2.

LAGRANGE et CAUCHY ont étendu la méthode que nous venons d'indiquer, à des équations du troisième degré beaucoup plus générales. Soit l'équation

$$Ax^3 + By^3 + Cz^3 + 3Dxyz = 0; \tag{3}$$

on déduit d'une première solution (x, y, z), en nombres entiers, une autre solution (X, Y, Z), par les formules

$$\begin{cases} X = x\,(By^3 - Cz^3), \\ Y = y\,(Cz^3 - Ax^3), \\ Z = z\,(Ax^3 - By^3), \end{cases} \tag{4}$$

Ainsi l'équation

$$x^3 + 2y^3 + 3z^3 = 6xyz,$$

qui a pour solution immédiate

$$x_0 = y_0 = z_0 = 1,$$

donne ensuite les solutions

$$\begin{cases} x_1 = 1, & x_2 = 19, & x_3 = 2\,82473, \ldots \\ y_1 = -2, & y_2 = 4, & y_3 = -86392, \ldots \\ z_1 = 1; & z_2 = -17; & z_3 = -1\,14427; \ldots \end{cases}$$

Nous observerons que les formules (4) peuvent être remplacées par celles-ci

$$(5) \qquad \frac{X}{x}+\frac{Y}{y}+\frac{Z}{z}=0, \quad AXx^2+BYy^2+CZz^2=0,$$

et conduisent à l'identité

$$Ax^3(Ax^3+2By^3)^3+By^3(By^3+2Ax^3)^3+27A^2B^2x^6y^6=[A^2x^6+7ABx^3y^3+B^2y^6]^2.$$

Cette identité fournit ainsi une série indéfinie de solutions de l'équation indéterminée

$$Au^3+Bv^3+A^2B^2w^3=t^2.$$

On doit encore à CAUCHY, l'indication suivante :* Si (x_0, y_0, z_0) et (x_1, y_1, z_1) désignent deux solutions distinctes de l'équation (3), on obtient une solution nouvelle au moyen des formules

$$\begin{cases} X=By_0y_1\,(x_0y_1-x_1y_0)+Cz_0z_1\,(x_0z_1-z_0x_1)+D\,(x_0^2y_1z_1-x_1^2y_0z_0), \\ Y=Cz_0z_1\,(y_0z_1-y_1z_0)+Ax_0x_1\,(y_0x_1-x_0y_1)+D\,(y_0^2z_1x_1-y_1^2z_0x_0), \\ Z=Ax_0x_1\,(z_0x_1-z_1x_0)+By_0y_1\,(z_0y_1-y_0z_1)+D\,(z_0^2x_1y_1-z_1^2x_0y_0). \end{cases}$$

On peut remplacer ces formules par celles-ci :

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} X, & Y, & Z, \\ x_0, & y_0, & z_0, \\ x_1, & y_1, & z_1, \end{vmatrix}=0, \quad AXx_0x_1+BYy_0y_1+CZz_0z_1=0.$$

Ainsi, par exemple, les solutions (x_0, y_0, z_0) et (x_2, y_2, z_2) de l'équation numérique, que nous venons de considérer, donnent

$$X=143, \quad Y=113, \quad Z=71.$$

SECTION 3.

Les résultats précédents sont des cas particuliers de ceux que nous allons indiquer. Soit l'équation du troisième degré

$$(7) \qquad f(x, y, z)=0,$$

d'une courbe en coordonnées rectilignes et homogènes ; désignons par m_1 un point dont les coordonnées (x_1, y_1, z_1) sont rationnelles, et qu'il est facile de rendre entières ; on a ainsi une première solution, en nombres entiers, de l'équation proposée. On obtient de nouvelles solutions, par l'un des trois procédés suivants :

1°. Si l'on mène la tangente à la cubique en m_1, cette droite rencontre la courbe en un autre point m dont les coordonnées sont rationnelles ; par

*CAUCHY.—*Sur la résolution de quelques équations indéterminées—en nombres entiers.*—Exercices de Mathématiques, 1826, t. I, pag. 256.

conséquent, d'une première solution de l'équation (7) on déduit, en général, une autre solution, par les formules

$$f(x, y, z) = 0, \quad x\frac{df}{dx_1} + y\frac{df}{dy_1} + z\frac{df}{dz_1} = 0.$$

Cependant, lorsque la tangente est parallèle à l'une des asymptotes de la cubique, ou lorsque la tangente est menée par un point d'inflexion, on n'obtient pas de solutions nouvelles.

2°. Si m_1 et m_2 désignent deux points de la cubique dont les coordonnées (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) sont entières, on obtient, en général, une nouvelle solution de l'équation (7), en prenant l'intersection de la courbe avec la sécante m_1m_2; on a donc à résoudre les deux équations

$$f(x, y, z) = 0, \quad \begin{vmatrix} x, & y, & z, \\ x_1, & y_1, & z_1, \\ x_2, & y_2, & z_2, \end{vmatrix} = 0,$$

en tenant compte des relations

$$f(x_1, y_1, z_1) = 0, \quad f(x_2, y_2, z_2) = 0.$$

3°. Lorsque l'on connaît cinq solutions de l'équation (7), on obtient, en général, une sixième solution, en prenant le point d'intersection avec la cubique, de la conique passant par les cinq points qui correspondent aux solutions données. D'ailleurs, on peut supposer plusieurs de ces points réunis en un seul, et en particulier tous les cinq réunis en un seul, à la condition d'établir entre les deux courbes le contact correspondant.

Nous observerons que les méthodes de FERMAT, LAGRANGE, et CAUCHY reviennent aux deux premiers procédés.

SECTION 4.

Nous considérerons, plus particulièrement, dans ce qui suit l'équation (1). EULER et LEGENDRE ont démontré que l'équation

$$x^3 + y^3 = Az^3, \tag{1}$$

est impossible, lorsque A est égal à 1, 2, 3, 4 ou 5; mais LEGENDRE s'est trompé, pour le cas de $A = 6$, ainsi que nous le montrerons plus loin. M. SYLVESTER est venu ajouter une importante contribution à la théorie de cette équation, en donnant un certain nombre de formes générales de A pour lesquelle, l'équation (1) est impossible. Les divers théorèmes indiqués par M. SYLVESTER sont renfermés dans l'énoncé suivant:

Si p et q désignent des nombres premiers des formes respectives $18n+5$ et $18n+11$, *il est impossible de décomposer en deux cubes, soit entiers, soit fractionnaires, aucun des nombres A suivants :*

$$p,\ 2p,\ 4p^2;\quad q^2,\ 2q^2,\ 4q.$$

PREMIER CAS.—En effet, soit d'abord à résoudre l'équation indéterminée

$$x^3+y^3=Az^3, \tag{1}$$

dans laquelle A désigne un nombre premier p de la forme $18n+5$, ou le carré q^2 d'un nombre premier de la forme $18n+11$; nous pouvons supposer les entiers x, y, z, premiers entre eux. Mais le cube d'un nombre entier divisé par 9 donne pour reste 0, ou $+1$ ou -1; donc, pour que l'équation (1) soit possible, il faut que z^3 soit divisible par 9; par suite $z=3z_1$, et z_1 est entier. Cela posé, nous ferons deux hypothèses, selon que z est impair ou pair.

1°. *Supposons z impair.* Alors $x-y$ et $x+y$ sont impairs; on a

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=(x+y)M,$$

et

$$4M=(x+y)^2+3(x-y)^2;$$

par conséquent, puisque $x+y$ est divisible par 3, M est aussi divisible par 3, mais non par une puissance supérieure; par conséquent, en désignant par a et b des nombres impairs, premiers entre eux, on doit poser

$$z_1=ab,\quad x+y=3^2Aa^3,\quad M=3b^3,$$

et, par suite

$$4b^3=(x-y)^2+3\left(\frac{x+y}{3}\right)^2.$$

D'ailleurs, b, diviseur de M, doit être de la forme f^2+3^2g, f et g étant premiers entre eux; on a ainsi

$$b=f^2+3g^2,\quad b^3=F^2+3G^2,\quad 4b^3=(F-3G)^2+3(F+G)^2;$$

et en identifiant les deux expressions de $4b^3$,

$$F+G=\frac{x+y}{3}=3Aa^3.$$

Mais le développement du cube de $f+g\sqrt{-3}$ donne

$$F=f(f^2-9g^2),\quad G=3g(f^2-g^2);$$

par suite

$$f(f^2-9g^2)+3g(f^2-g^2)=3Aa^3;$$

donc f serait divisible par 3, par suite b, et aussi x et y, que nous avons supposés premiers entre eux. Par conséquent, z ne peut être impair.

2°. *Supposons z pair ;* on aurait

$$M = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{x-y}{2}\right)^2,$$

et, puisque x et y sont impairs, il en est de même de M. On doit donc poser

$$z_1 = 2ab, \quad x+y = 3^2.2^3.Aa^3, \quad M = 3b^3,$$

et, par suite

$$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{x+y}{6}\right)^2 = b^3.$$

Soient encore

$$b = f^2 + 3g^2, \quad b^3 = F^2 + 3G^2;$$

on en déduira

$$G = \frac{x+y}{6}, \quad \text{ou} \quad g(f^2 - g^2) = 4Aa^3.$$

D'ailleurs $f^2 + 3g^2$ et $f^2 + 3g^2 - 4g^2 = f^2 - g^2$ sont impairs ; donc g est pair, et en désignant par α, β, γ trois nombres impairs et premiers entre eux dont le produit égale a, on doit poser

$$g = 4A\alpha^3, \quad f+g = \beta^3, \quad f-g = \gamma^3;$$

ou

$$g = 4\alpha^3, \quad f+g = A\beta^3, \quad f-g = \gamma^3.$$

On déduit de ces deux décompositions

$$\beta^3 - \gamma^3 = A(2\alpha)^3, \quad \text{ou} \quad \gamma^3 + (2\alpha)^3 = A\beta^3;$$

ces deux équations sont semblables à l'équation (1) ; on ramène donc l'équation proposée, dans laquelle l'une des inconnues contient le facteur 3^λ, à une autre semblable, dans laquelle l'une des inconnues ne contient plus que le facteur $3^{\lambda-1}$; en continuant de même, on ramènera l'équation proposée à une autre de même forme dans laquelle une des inconnues ne sera pas divisible par 3. Donc l'équation proposée est impossible lorsque A est égal à un nombre premier $p = 18n + 5$; ou au carré q^2 d'un nombre premier $q = 18n + 11$.

SECOND CAS. Considérons maintenant l'équation

$$x^3 + y^3 = 2^n A z^3,$$

dans laquelle A étant impair, le coefficient $2^n A$ représente l'un des quatre nombres $2p$, $2q^2$, $4p^2$, $4q$. Nous supposerons x, y, z entiers et premiers entre eux ; x et y étant impairs. De plus, nous ferons deux hypothèses suivant que z est ou n'est pas divisible par 3.

1°. *Supposons z non divisible par* 3. On arrive facilement à l'équation

$$f(f^2 - 9g^2) = 2^{n-1}Aa^3;$$

mais $f^2 - 9g^2$ est impair, en même tempts que $b = f^2 + 3g^2$, et l'on a

$$f = 2^{n-1}A\alpha^3, \quad f + 3g = \beta^3, \quad f - 3g = \gamma^3;$$

ou bien

$$f = 2^{n-1}\alpha^3, \quad f + 3g = \beta^3, \quad f - 3g = \gamma^3.$$

Ces deux décomposition conduisent aux deux équations

$$\beta^3 + \gamma^3 = 2^n A\alpha^3, \quad \text{ou} \quad A\beta^3 + \gamma^3 = 2^n\alpha^3;$$

celles-ci sont impossibles suivant le module q, puisque, pour la première, les indéterminées α, β et γ ne sont pas divisible par 3.

2°. *Supposons z divisible par* 3. En posant $z = 3ab$, on arrive, connue plus haut, à l'équation

$$g\,(f^2 - g^2) = 2^{n-1}A\alpha^3,$$

et, puisque $f^2 - g^2$ est impair, à l'une des décompositions

$$g = 2^{n-1}A\alpha^3, \quad f + g = \beta^3, \quad f - g = \gamma^3;$$

ou bien

$$g = 2^{n-1}\alpha^3, \quad f + g = A\beta^3, \quad f - g = \gamma^3.$$

La seconde décomposition conduit à une équation déjà reconnue impossible; la première conduit à l'équation

$$\beta^3 - \gamma^3 = 2^n A\alpha^3.$$

Celle-ci est de même forme que la proposée; mais l'indéterminée du second membre contiendra un facteur 3 en moins. On conclura, connue précédemment, que l'équation proposée est impossible à résoudre en nombres entiers.

SECTION 5.

Les six valeurs générales de A données par M. SYLVESTER sont, jusqu'à présent, les seules valeurs connues qui rendent insoluble l'équation donnée, en ajoutant toutefois les valeurs

$$A = 1, 2, 3, 4, 18, 36,$$

données par FERMAT, EULER et LEGENDRE. On a encore le théorème suivant:

Pour que l'équation

$$X^3 + Y^3 = AZ^3,$$

soit vérifiée par des valeurs entières de X, Y, Z, A, il faut et il suffit que A appartienne à la forme

$$xy\,(x + y)$$

préalablement débarassée des facteurs cubiques qu'elle peut contenir.

En effet, on a l'identité

$$\begin{aligned}&[x^3 - y^3 + 6x^2y + 3xy^2]^3 + [y^3 - x^3 + 6y^2x + 3yx^2]^3\\ &\quad = xy\,(x + y)\,.\,3^3\,[x^2 + xy + y^2]^3,\end{aligned}$$

et l'on résout l'équation proposée, par les valeurs

$$\begin{cases} X = x^3 - y^3 + 6x^2y + 3xy^2, \\ Y = y^3 - x^3 + 6y^2x + 3yx^2, \\ Z = 3(x^2 + xy + y^2), \\ A = xy(x+y). \end{cases}$$

Réciproquement, si l'équation est vérifiée pour les valeurs x_0, y_0, z_0 des variables, et si l'on pose

$$x = x_0^3, \quad y = y_0^3,$$

on a

$$xy(x+y) = A(x_0y_0z_0)^3.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer. Il résulte encore de l'identité précédente que toute solution de l'équation proposée conduit à une série indéfinie d'autres solutions, en supposant A constant. Il faut excepter le cas de $x = \pm y$.

EXEMPLE: Pour $x = 1$, $y = 2$, on a la solution

$$17^3 + 37^3 = 6 \,.\, 21^3;$$

de laquelle on déduit une série indéfinie d'autres solutions. Ainsi l'équation

$$x^3 + y^3 = 6z^3,$$

est résoluble en nombres entiers, et d'une infinité de manières, bien que LEGENDRE ait affirmé le contraire.

PARIS, *Mai, 1879.*